problématique

Pour tout entier naturel n, notons P_n la proposition, vraie ou fausse, qui affirme que la somme des entiers naturels de 0 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Pour un entier naturel n fixé, il est aisé de vérifier que la proposition P_n est vraie :

- Pour $n=0$, on a $\frac{0(0+1)}{2}=0=0+\ldots+0$, de telle sorte que la proposition P_0 est vraie.
- Pour $n=1$, on a $\frac{1(1+1)}{2}=1=0+\ldots+1$, de telle sorte que la proposition P_1 est vraie.
- Pour $n=2$, on a $\frac{2(2+1)}{2}=3=0+\ldots+2$, de telle sorte que la proposition P_2 est vraie.
- Pour $n=3$, on a $\frac{3(3+1)}{2}=6=0+\ldots+3$, de telle sorte que la proposition P_3 est vraie.

Cependant, puisqu'il existe une infinité d'entiers naturels, il n'est pas possible, en un temps fini, de vérifier que chaque proposition P_n est vraie.

Comment montrer alors que toutes les propositions P_n sont vraies ?